枯渇性資源と世代間の公平

——コブ＝ダグラス型生産関数の場合——

増 田 信 彦

1. はじめに

枯渇性資源は，再生不能資源とも呼ばれ，石油，石炭，天然ガスなどの化石燃料や金属，非金属の鉱物のように，事実上更新することができない資源を意味する。そのため，枯渇性資源の著しい特徴の一つは，人間が消費すれば消費した分だけその総量が減少していくことである。このような有限な資源（これ以降枯渇性資源のことをそう略称する）を現在と将来の世代の間にどのように分配すべきかは重要な問題である。というのは，現世代が資源を多く使用すれば将来世代に残される資源の量は少なくなるからである。反面，資源を現在多く使用することによって，より多くの資本やより高い技術を将来世代に残すこともできる。それゆえ，資源の世代間の分配は現世代の厚生と将来世代の厚生という広い観点から見る必要がある。そして，それについても価値観の違いからいろいな考え方があるが，代表的なものとして功利主義，公平主義などがある。

ここでは，公平主義，特にロールズ〔5〕の正義原則に基づいて，有限な資源のもとでの世代間の分配がどのようになるかを調べる。それは他の権利などと共に所得や資産において最も恵まれない人や世代に対して多く分配することをもって公平と見なすもので，相対的最低水準を最大化するマックス・ミニ基準の1つである。この原則を有限な資源のもとにおける世代間の分配問題に最初に適用したのはソロー〔6〕であり，1人当たりの消費量が時間を通じて一

定となるような解が存在することを示した。ハートウィックは，〔2〕において，資源からのすべてのレントが投資されるならば，世代間の公平が達成されることを明らかにし，〔3〕においてそれを，多数の資源を生産要素とするコブ＝ダグラス型以外の生産関数に拡張している。ディキシット，ハモンド，ホーエル〔1〕はより一般的なハートウィックの投資基準を用いることにより，時間を通じて一定の効用が得られることを示している。

これらのモデルはすべて技術進歩や人口増加が無いことを仮定しているが，奥口〔4〕はそれらを考慮したモデルにおいて，世代間の公平が達成されるための条件を明らかにしている。また，スティグリッツ〔7〕は1人当たりの消費量が一定の率で伸びる持続的成長が可能となる条件や持続的成長率と貯蓄率（したがって投資率）との関係などを示している。

この小論においては，コブ＝ダグラス型生産関数の場合に世代間の公平が達成されるための条件を求め，奥口の条件やスティグリッツの条件と比較対照することを試みる。

2. ハートウィックの投資基準の場合

ここでは特殊な生産関数として次のようなコブ＝ダグラス型を用いる。

$$Q=e^{\lambda t}F(K,\ L,\ R)=e^{\lambda t}K^{\alpha_1}L^{\alpha_2}R^{\alpha_3}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1,\ \ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>0 \qquad (1)$$

ここで，Q＝産出量，K＝資本ストック量，L＝労働供給量，R＝資源投入量，λ＝一定の技術進歩率。生産関数がコブ＝ダグラス型の場合，この技術進歩は資本，労働，資源に関して中立的であることを意味する。

コブ＝ダグラス型関数は1次同次なので，1人当たりに換算して，

$$q=Q/L,\ \ k=K/L,\ \ r=R/L,\ \ f(\mathrm{k},r)=F(k,1,r) \qquad (2)$$

とすると，(1)より

$$q=e^{\lambda t}f(k,r)=e^{\lambda t}k^{\alpha_1}r^{\alpha_3} \qquad (3)$$

生産物が消費財と資本財のどちらにでも利用でき，また，Qが純生産物を表す

か，あるいはKが減耗しないかのどちらかを仮定すれば，

$$Q=C+dK/dt \tag{4}$$

ここで，C＝消費量。

人口や労働供給量が一定の率 n で成長すると仮定すれば，

$$dL/dt/L=n \tag{5}$$

次に，資源ストック量Sが有限ならば，効率性の条件より[1)]，

$$d(\partial Q/\partial R)/dt/(\partial Q/\partial R)=\partial Q/\partial K$$

(2)より

$$d(\partial q/\partial r)/dt/(\partial q/\partial r)=\partial q/\partial k$$

(3)より

$$d(e^{\lambda t}f_r)/dt/e^{\lambda t}f_r=e^{\lambda t}f_k$$

$$\lambda f_r+df_r/dt=e^{\lambda t}f_kf_r \tag{6}$$

これから，次のような式が得られる。

$$dr/dt=r(\lambda k-e^{\lambda t}\alpha_1 f+\alpha_1 dk/dt)/(1-\alpha_3)k \tag{7}$$

[2)]

---

1) これは次のようにして得られる。

$$dK/dt=Q(K,\ L,\ R,\ t)-C,\ dS/dt=-R$$

という制約のもとで，$\int g(C)dt$ を最大化する問題を考える。ここで，$g(C)$ は任意の，Cの増加関数。最適制御理論により，ハミルトン関数を

$$H=g(C)+\lambda[Q(K,\ L,\ R,\ t)-C]-\mu R$$

とおくと，$\partial H/\partial R=\lambda\partial Q/\partial R-\mu=0$, $d\mu/dt=-\partial H/\partial S=0$, $d\lambda/dt=-\partial H/\partial K=-\lambda\partial Q/\partial K$ という必要条件が得られる。これらより，$\lambda=\mu/(\partial Q/\partial R)$, $d\lambda/dt=-\mu d(\partial Q/\partial R)/dt/(\partial Q/\partial R)^2=-\lambda d(\partial Q/\partial R)/dt/(\partial Q/\partial R)=-\lambda\partial Q/\partial K$。ゆえに，

$$d(\partial Q/\partial R)/dt/(\partial Q/\partial R)=\partial Q/\partial K$$

2) これは次のようにして導かれる。まず，(3)より

$$\begin{aligned}dfr/dt&=d(\alpha_3 f/r)/dt\\&=\alpha_3(rdf/dt-fdr/dt)/r^2\\&=\alpha_3[r(f_rdr/dt+f_kdk/dt)-fdr/dt]/r^2\\&=\alpha_3[rf_kdk/dt-(f-rf_r)dr/dt]/r^2\end{aligned}$$

これを(6)に代入すると，

$$\lambda f_r+\alpha_3[rf_kdk/dt-(f-rf_r)dr/dt]/r^2=e^{\lambda t}f_kf_r$$

産出量や消費量の経路は投資がどのように行われるかによって異なってくる。ここでは初めにハートウィックの投資基準〔2〕の場合について考察する。この基準によれば，資源からのすべての純レントが投資されることになる。採収コストが無いものと仮定すれば，

$$dK/dt=R\partial Q/\partial R=(R/Q)Q\partial Q/\partial R=\alpha_3 Q \tag{8}$$

(2)，(5)より

$$\mathrm{d}k/dt/k=dK/\mathrm{dt}/K-dL/dt/L=\alpha_3 Q/K-n=\alpha_3 q/k-n$$

したがって，

$$dk/dt=\alpha_3 e^{\lambda t}f-\mathrm{n}k \tag{9}$$

1人当たりの消費量は，(4)，(8)より

$$c=C/L=(Q-dK/dt)/L=(Q-\alpha_3 Q)/L=(1-\alpha_3)q$$

ロールズ〔5〕のマックス・ミニの原則を異時点間の問題に適用すると，例外を除いて，1人当たりの消費量が時間を通じて一定となるので，

$$dc/dt=(1-\alpha_3)dq/dt=(1-\alpha_3)d(e^{\lambda t}f)/dt$$
$$=(1-\alpha_3)e^{\lambda t}(\lambda f+df/dt)=0$$

すなわち，$dc/dt=0$ となるための必要十分条件は，

$$\lambda f+\mathrm{d}f/dt=0 \tag{10}$$

そして

$$\lambda f+df/dt=f(\lambda-\alpha_1 n)/(1-\alpha_3)$$ [3)]

---

(3)より

$$\lambda\alpha_3 f/r+\alpha_3[r(\alpha_1 f/k)dk/dt-(f-\alpha_3 f)dr/dt]/r^2=e^{\lambda t}(\alpha_1 f/k)(\alpha_3 f/r)$$
$$\lambda kr+\alpha_1 rdk/dt-(1-\alpha_3)kdr/dt=e^{\lambda t}\alpha_1 rf$$

ゆえに，

$$dr/dt=r(\lambda k-e^{\lambda t}\alpha_1 f+\alpha_1 dk/dt)/(1-\alpha_3)k$$

3) これは次のようにして導かれる。

$$\lambda f+df/dt=\lambda f+f_k dk/dt+f_r dr/dt$$

(7)より

$$=\lambda f+(\alpha_1 f/k)dk/dt+(\alpha_3 f/r)r(\lambda k-e^{\lambda t}\alpha_1 f+\alpha_1 dk/dt)/(1-\alpha_3)k$$

が得られるので，その条件は，

$$\lambda = \alpha_1 n \tag{11}$$

となる。すなわち，1人当たりの消費量を時間を通じて一定とするための必要十分条件は，$\alpha_1 = kf_k/f$ より，技術進歩率と人口増加率の比が産出の資本弾力性（完全競争の場合，資本への分け前を意味する）に等しいことである。この条件はより一般的なモデルで得られた奥口〔4〕の必要十分条件と同じである。[4)]

また，

$$Q = e^{\lambda t}K^{\alpha_1}L^{\alpha_2}R^{\alpha_3} = [e^{(\lambda/\alpha_1)t}K]^{\alpha_1}L^{\alpha_2}R^{\alpha_3}$$

となるので，λ/α_1 は資本増加的技術進歩率とも考えられる。そこで，前述の条件は資本増加的技術進歩率が人口増加率に等しいことを意味する。

次に，一定の消費量を実現するために資源の有限性がもたらす条件について考察する。資源が有限ならば，資源投入量は究極的に減少しなければならないので，$\hat{R} = dR/dt/R$ とすると，

$$\hat{R} < 0$$

が満たされる。(2)，(5)より

$$\hat{R} = dr/dt/r + n$$

(7)より

$$= (\lambda k - e^{\lambda t}\alpha_1 \mathrm{f} + \alpha_1 dk/dt)/(1-\alpha_3)k + \mathrm{n}$$

(9)より

$$= \lambda f + [\alpha_1 f/k + \alpha_1\alpha_3 f/(1-\alpha_3)k]dk/dt + \alpha_3 f(\lambda k - e^{\lambda t}\alpha_1 f)/(1-\alpha_3)k$$

$$= [\alpha_1 f/(1-\alpha_3)k]dk/dt + f(\lambda k - \alpha_1\alpha_3 e^{\lambda t}f)/(1-\alpha_3)k \tag{☆}$$

$$= f[\lambda k + \alpha_1(dk/dt - \alpha_3 e^{\lambda t}f)]/(1-\alpha_3)k$$

(9)より

$$= f(\lambda k - \alpha_1 nk)/(1-\alpha_3)k$$

$$= f(\lambda - \alpha_1 n)/(1-\alpha_3)$$

4) 奥口のモデルでは，多数の枯渇性及び更新性資源を生産要素とする1次同次の生産関数を用いており，また，採収コストを差し引いた資源の純レントが投資されている。

$$=[\lambda k-e^{\lambda t}\alpha_1 f+\alpha_1(\alpha_3 e^{\lambda t}f-nk)]/(1-\alpha_3)k+n$$

$$=[k(\lambda-\alpha_1 n)-\alpha_1 e^{\lambda t}f(1-\alpha_3)]/(1-\alpha_3)k+n$$

(11)より

$$=n-e^{\lambda t}\alpha_1 f/k=n-e^{\lambda t}f_k$$

故に，$\hat{R}<0$ となるための必要十分条件は

$$e^{\lambda t}f_k>n \tag{12}$$

そこで，$x=e^{\lambda t}f_k$ とおいて，その経路を調べてみる。まず，

$$dk/dt=\alpha_3 e^{\lambda t}f-nk=\alpha_3 e^{\lambda t}f_k k/\alpha_1-nk$$

$$=(\alpha_3 k/\alpha_1)(e^{\lambda t}f_k-\alpha_1 n/\alpha_3) \tag{13}$$

$$dx/dt=d(e^{\lambda t}\alpha_1 f/k)/dt$$

$$=\lambda e^{\lambda t}\alpha_1 f/k+e^{\lambda t}\alpha_1(kdf/dt-fdk/dt)/k^2$$

$$=e^{\lambda t}\alpha_1[k(\lambda f+df/dt)-fdk/dt]/k^2$$

(10)より

$$=-(\alpha_1 e^{\lambda t}f/k^2)dk/dt$$

(13)より

$$=-(\alpha_1 e^{\lambda t}f/k^2)(\alpha_3 k/\alpha_1)(e^{\lambda t}f_k-\alpha_1 n/\alpha_3)$$

$$=-(\alpha_3 e^{\lambda t}f/k)(x-\alpha_1 n/\alpha_3) \tag{14}$$

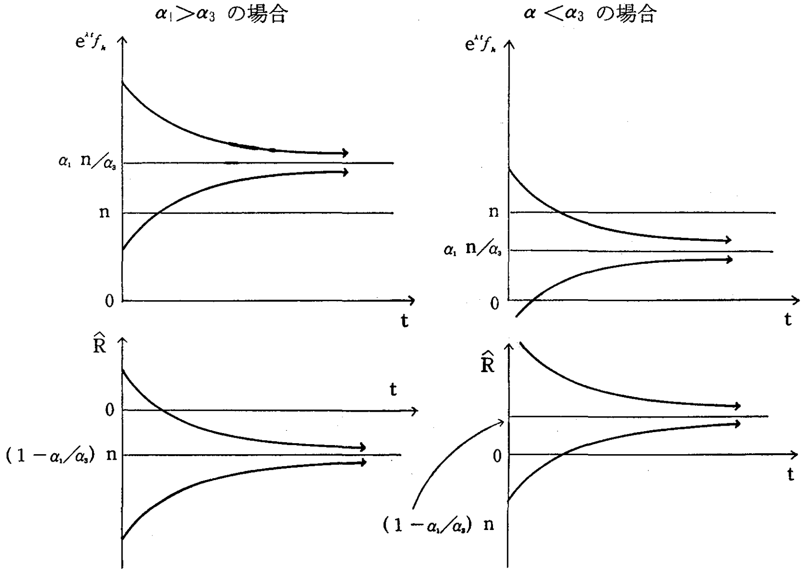
これは1階の微分方程式で，$\alpha_3 e^{\lambda t}f/k>0$ より，$e^{\lambda t}f_k$ は $\alpha_1 n/\alpha_3$ に収束する（図—1参照)。それゆえ，(12)が漸近的に満たされるための必要十分条件は，

$$\alpha_1>\alpha_3 \tag{15}$$

すなわち，この条件は産出の資本弾力性が資源弾力性より大きいことを意味する。また，この条件は(11)から $\lambda>\alpha_3 n$ となり，技術進歩率と人口増加率の比が産出の資源弾力性より大きいことを意味する。これは1人当たりの消費量を一定に維持するためのスティグリッツ〔7〕の必要十分条件と同じである。

その結果，(11)，(15)より，コブ＝ダグラス型生産関数で，資源からのすべてのレントが投資される場合，1人当たりの消費量を一定に維持するための必要十分条件は，技術進歩率と人口増加率の比が産出の資本弾力性に等しく，そして

図—1



資源弾力性より大きいことである。

3. スティグリッツの投資基準の場合

次に，スティグリッツの投資基準〔7〕によれば，投資量は技術進歩率や人口増加率を考慮した次のような式によって与えられる。[5)]

$$dK/dt=(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)Q,n>0,\quad \lambda>n\alpha_1\alpha_3 \tag{16}$$

$$dk/dt/k=dK/dt/K-dL/dt/L=(\mathrm{n}\alpha_1\alpha_3/\lambda)q/k-n$$

したがって，

$$dk/dt=(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)e^{\lambda t}f-nk \tag{17}$$

1人当たりの消費量は，

5) スティグリッツは1人当たりの消費量が一定の率で伸びる持続的成長について考察し，持続的成長が可能となる条件や持続的成長率と貯蓄率との関係などを示している。ここでは，その中で1人当たりの消費量が一定となる場合を取り出している。

$$c=(Q-dK/dt)/L=[1-(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)]q$$

1人当たりの消費量が時間を通じて一定になるためには

$$dc/dt=[1-(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)]d(e^{\lambda t}f)/dt$$
$$=[1-(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)]e^{\lambda t}(\lambda f+df/dt)=0$$

すなわち，$dc/dt=0$ となるための条件は，

$$\lambda f+df/dt=0 \tag{18}$$

そして，

$$\lambda f+df/dt=f(\alpha_1 n-\lambda)(dk/dt)/(1-\alpha_3)nk$$ [6)]

となるので，

$$\lambda=\alpha_1 n \tag{19}$$

あるいは

$$dk/dt=0 \tag{20}$$

ならば，$dc/dt=0$ が得られる。すなわち，1人当たりの消費量が時間を通じて一定となるための必要十分条件は，技術進歩率と人口増加率の比が産出の資本弾力性に等しいか，あるいは，1人当たりの資本量が一定になるかである。

これより，この条件を2つの場合に分けて考察する。

(i)　$\lambda=\alpha_1 n$ の場合

この場合，投資関数が(16)より

$$dK/dt=(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)Q=\alpha_3 Q$$

となり，ハートウィックの投資基準の場合と同じになる。その結果，資源の有限性から，必要十分条件は

$$\alpha_1(=\lambda/n)>\alpha_3 \tag{21}$$

---

6)　これは次のようにして得られる。脚注3)の(☆)までは同じで，

$$\lambda f+df/dt=[\alpha_1 f/(1-\alpha_3)k]dk/dt+f(\lambda k-\alpha_1\alpha_3 e^{\lambda t}f)/(1-\alpha_3)k$$
$$=[\alpha_1 f/(1-\alpha_3)k]dk/dt\ -[\lambda f/(1-\alpha_3)nk][(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)e^{\lambda t}f-nk]$$

(17)より

$$=[\alpha_1 f/(1-\alpha_3)k]dk/dt-[\lambda f/(1-\alpha_3)nk]dk/dt$$
$$=f(\alpha_1 n-\lambda)(dk/dt)/(1-\alpha_3)nk$$

更に，この場合，⒁より $e^{\lambda t}f_k$ が $\alpha_1 n/\alpha_3$ に収束するので，⒀より漸近的に

$$dk/dt=0$$

が成り立ち，次の場合に近付くことになる。

(ii) $dk/dt=0$ **の場合**

まず，資源の有限性の条件を求める。

$$\hat{R}=dr/dt/r+n$$

⑺より

$$=(\lambda k-e^{\lambda t}\alpha_1 f+\alpha_1 dk/dt)/(1-\alpha_3)k+n$$

$$=(\lambda k-e^{\lambda t}\alpha_1 f)/(1-\alpha_3)k+n$$

$$=n-[\lambda/(1-\alpha_3)\alpha_3 nk][(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)e^{\lambda t}f-\alpha_3 nk]$$

⒄より

$$=n-[\lambda/(1-\alpha_3)\alpha_3 nk](\mathrm{d}k/dt+nk-\alpha_3 nk)$$

$$=n-\lambda/\alpha_3$$

したがって，$\hat{R}<0$ のための必要十分条件は，

$$\lambda/n>\alpha_3 \tag{22}$$

(21)と(22)より，２つの場合共，資源の有限性の必要十分条件は技術進歩率と人口増加率の比が産出の資源弾力性より大きいことである。これは１人当たりの消費量を一定に維持するためのスティグリッツ〔７〕の必要十分条件と同じである。

次に，(ii)の場合，$dk/dt=0$ は必ずしも成り立つわけではないが，漸近的に成り立つことを証明する。

$$\begin{aligned}dk/dt&=(n\alpha_1\alpha_3/\lambda)e^{\lambda t}f-nk\\&=(n\alpha_3 k/\lambda)e^{\lambda t}\alpha_1 f/k-nk\\&=(n\alpha_3 k/\lambda)(e^{\lambda t}f_k-\lambda/\alpha_3)\end{aligned} \tag{23}$$

ここで，$x=e^{\lambda t}f_k$ とおいて，その経路を調べてみる。

$$\begin{aligned}dx/\mathrm{d}t&=d(e^{\lambda t}\alpha_1 f/k)dt\\&=\lambda e^{\lambda t}\alpha_1 f/k+e^{\lambda t}\alpha_1(k\mathrm{d}f/dt-fdk/\mathrm{dt})/k^2\end{aligned}$$

$$=e^{\lambda t}\alpha_1[k(\lambda f+df/dt)-fdk/dt]/k^2$$

(18)より

$$=-(\alpha_1 e^{\lambda t}f/k^2)dk/dt$$

(23)より

$$=-(\alpha_1 e^{\lambda t}f/k^2)(n\alpha_3 k/\lambda)(e^{\lambda t}f_k-\lambda/\alpha_3)$$

$$=-(n\alpha_1\alpha_3 e^{\lambda t}f/\lambda k)(x-\lambda/\alpha_3)$$

これは1階の微分方程式で，$n\alpha_1\alpha_3 e^{\lambda t}f/\lambda k>0$ より，$e^{\lambda t}f_k$ は λ/α_3 に収束する。それゆえ，(23)より $dk/dt=0$ が漸近的に満たされる。

このことから，条件(19)より条件(20)の方が条件として弱いように見える。したがって，コブ＝ダグラス型生産関数の場合，ハートウィックの投資基準よりスティグリッツの投資基準の方が1人当たりの消費量を一定にしやすいように思われる。

これらの結果，コブ＝ダグラス型生産関数で，(16)式で表されるように技術進歩率や人口増加率を考慮して投資される場合，1人当たりの消費量を時間を通じて一定とするための必要十分条件は，(19)，(20)，(21)，(22)より，次のようになる。

① 技術進歩率と人口増加率の比が産出の資本弾力性に等しいか，あるいは1人当たりの資本量が一定になること。

及び

② 技術進歩率と人口増加率の比が産出の資源弾力性より大きいこと。

参考文献

〔1〕 Dixit, A., Hammond, P., and Hoel, M., "On Hartwick's Rule for Regular Maximin Paths of Capital Accumulation and Resource Depletion", *Review of Economic Studies*, 47 (1980), 551—556.

〔2〕 Hartwick, J. M., "Intergenerational Equity and the Investing of Rents from Exhaustible Resources", *American Economic Review*, 67 (1977), 972—974.

〔3〕 Hartwick, J. M., "Substitution among Exhaustible Resources and Intergenerational Equity", *Review of Economic Studies,* 45 (1978), 347—354.

〔4〕 Okuguchi, K., "Technical Progress, Population Growth and Intergenerational Equity in a Model with Many Exhaustible and Renewable Resources", *Economics Letters,* 3 (1979), 57—60.

〔5〕 Rawls, J., *A Theory of Justice,* Harvard University Press, 1971. (矢島鈞次監訳「正義論」紀伊国屋, 1979)

〔6〕 Solow, R. M., "Intergenerational Equity and Exhaustible Resources", *Review of Economic Studies,* 41 (1974), Symposium, 29—45.

〔7〕 Stiglitz, J., "Growth with Exhaustible Natural Resources: Efficient and Optimal Growth Paths", *Review of Economic Studies,* 41 (1974), Symposium, 123—137.